Colorações, Fluxos e Polinómios

Domingos Moreira Cardoso

Universidade de Aveiro

Ciclo de Seminários do CEOC
Departamento de Matemática, sala Sousa Pinto
19 de Outubro de 2007

Outline

O problema das quatro cores

- O problema da coloração de mapas proposto pelo cartógrafo inglês Francis Guthrie, em 1852.

O problema das quatro cores

- O problema da coloração de mapas proposto pelo cartógrafo inglês Francis Guthrie, em 1852.
- De Morgan envia uma carta a Hamilton, pedindo-lhe colaboração para a resolução do problema das quatro cores (P4C) proposto por um seu aluno, Frederick Guthrie (irmão de Francis Guthrie).

O problema das quatro cores

- O problema da coloração de mapas proposto pelo cartógrafo inglês Francis Guthrie, em 1852.
- De Morgan envia uma carta a Hamilton, pedindo-lhe colaboração para a resolução do problema das quatro cores (P4C) proposto por um seu aluno, Frederick Guthrie (irmão de Francis Guthrie).
- Nessa carta, De Morgan mostra a necessidade de 4 cores, exibindo um mapa adequado.

O problema das quatro cores

- O problema da coloração de mapas proposto pelo cartógrafo inglês Francis Guthrie, em 1852.
- De Morgan envia uma carta a Hamilton, pedindo-lhe colaboração para a resolução do problema das quatro cores (P4C) proposto por um seu aluno, Frederick Guthrie (irmão de Francis Guthrie).
- Nessa carta, De Morgan mostra a necessidade de 4 cores, exibindo um mapa adequado.
- Numa publicação de 1879, Cayley refere-se ao problema das quatro cores como um problema em aberto e apresenta várias dificuldade relacionadas com a resolução.

O problema das quatro cores

- O problema da coloração de mapas proposto pelo cartógrafo inglês Francis Guthrie, em 1852.
- De Morgan envia uma carta a Hamilton, pedindo-lhe colaboração para a resolução do problema das quatro cores (P4C) proposto por um seu aluno, Frederick Guthrie (irmão de Francis Guthrie).
- Nessa carta, De Morgan mostra a necessidade de 4 cores, exibindo um mapa adequado.
- Numa publicação de 1879, Cayley refere-se ao problema das quatro cores como um problema em aberto e apresenta várias dificuldade relacionadas com a resolução.
- Kempe propõe uma pretensa solução que só 11 anos mais tarde é refutada por Heawood, no seu primeiro trabalho escrito, provando a suficiência de 5 cores.

Coloração de faces de grafos planares

Formalmente, uma k-coloração das faces de um mapa plano G é uma atribuição de cores: $1, \ldots, k$, às faces de G, de modo que faces incidentes na mesma aresta tenham cores distintas. Desta forma, grafos com arestas de corte, como o que se indica na figura a seguir, não admitem k-colorações das sua faces (uma vez que a face ilimitada incide duplamente em cada aresta de corte).

Coloração de faces de grafos planares

Formalmente, uma k-coloração das faces de um mapa plano G é uma atribuição de cores: $1, \ldots, k$, às faces de G, de modo que faces incidentes na mesma aresta tenham cores distintas. Desta forma, grafos com arestas de corte, como o que se indica na figura a seguir, não admitem k-colorações das sua faces (uma vez que a face ilimitada incide duplamente em cada aresta de corte).

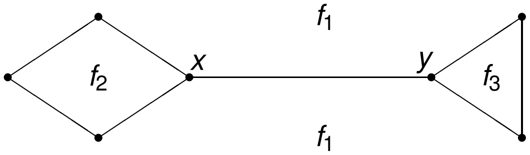

Figure: A face f_1 incide duas vezes na aresta de corte xy.

Coloração de vertices e faces de grafos planares

Teorema [Heawood,1890]

Todo o grafo planar, sem lacetes, admite uma coloração de vértices com 5 cores.

Coloração de vertices e faces de grafos planares

Teorema [Heawood,1890]

Todo o grafo planar, sem lacetes, admite uma coloração de vértices com 5 cores.

Teorema[Tait]

Se um mapa plano tem um ciclo de Hamilton, então admite uma 4-coloração das suas faces.

Coloração de vertices e faces de grafos planares

Teorema [Heawood,1890]

Todo o grafo planar, sem lacetes, admite uma coloração de vértices com 5 cores.

Teorema[Tait]

Se um mapa plano tem um ciclo de Hamilton, então admite uma 4-coloração das suas faces.

Nova tentativa falhada para a resolução do P4C

Em 1880, Tait conjecturava que todos os grafos cúbicos, 2-conexos, planares, admitiam um ciclo de Hamilton e, consequentemente, por aplicação do teorema de Tait, admitiriam uma 4-coloração das suas faces. Note-se que podemos transformar um mapa plano arbitrário num mapa cúbico plano (introduzindo novas faces).

O teorema das quatro cores

- Ambas as tentativas (não conseguidas) de resolução do problema das quatro cores tiveram contributos positivos.

O teorema das quatro cores

- Ambas as tentativas (não conseguidas) de resolução do problema das quatro cores tiveram contributos positivos.
- A técnica utilizada por Kempe deu origem ao conceito de cadeia de Kempe que foi utilizada por Heawood na demonstração da suficiência de 5 cores e é utilizada na redutibilidade de configurações na prova do teorema das quatro cores (Appel e Aken, 1977).

O teorema das quatro cores

- Ambas as tentativas (não conseguidas) de resolução do problema das quatro cores tiveram contributos positivos.
- A técnica utilizada por Kempe deu origem ao conceito de cadeia de Kempe que foi utilizada por Heawood na demonstração da suficiência de 5 cores e é utilizada na redutibilidade de configurações na prova do teorema das quatro cores (Appel e Aken, 1977).
- Tait mostrou que o problema da coloração dos vértices de triangulações planas com quatro cores é equivalente à coloração das arestas com apenas 3 cores.

O teorema das quatro cores

- Ambas as tentativas (não conseguidas) de resolução do problema das quatro cores tiveram contributos positivos.
- A técnica utilizada por Kempe deu origem ao conceito de cadeia de Kempe que foi utilizada por Heawood na demonstração da suficiência de 5 cores e é utilizada na redutibilidade de configurações na prova do teorema das quatro cores (Appel e Aken, 1977).
- Tait mostrou que o problema da coloração dos vértices de triangulações planas com quatro cores é equivalente à coloração das arestas com apenas 3 cores.

Teorema [Tait,1878-80]

Sendo G uma triangulação do plano, $\chi(G) \leq 4$ se e só se as arestas de G podem ser coloridas com com três cores, de tal modo que na fronteira de cada face existam as três cores.

O teorema das três cores

Em 1958, Grötzsch obteve o seguinte resultado, conhecido por *teorema das três cores*.

Teorema [Grötzsch, 1958]

Todo o mapa planar, sem arestas de corte e sem cortes de cardinalidade 3, admite uma coloração das suas faces com 3 cores.

O teorema das três cores

Em 1958, Grötzsch obteve o seguinte resultado, conhecido por *teorema das três cores*.

Teorema [Grötzsch, 1958]

Todo o mapa planar, sem arestas de corte e sem cortes de cardinalidade 3, admite uma coloração das suas faces com 3 cores.

Em 1963, Grünbaum generalizou o teorema de Grötzsch.

Teorema [Grünbaum, 1963]

Todo o mapa planar, sem arestas de corte e com não mais do que três cortes de cardinalidade 3, admite uma 3-coloração das suas faces.

Definições

Definição

Dado um grafo planar G que, sem perda de generalidade, se admite realizado no plano, designa-se por *dual geométrico* (ou, simplesmente, dual) de G e denota-se por G^*, o grafo obtido de G por aplicação do seguinte procedimento:

1. A cada face de G faz-se corresponder um vértice de G^*.
2. A cada aresta $e \in E(G)$ faz-se corresponder uma aresta $e^* \in E(G^*)$ que liga duas faces (vértices de $V(G^*)$) vizinhas, cruzando a aresta e.

Definições

Definição

Dado um grafo planar G que, sem perda de generalidade, se admite realizado no plano, designa-se por *dual geométrico* (ou, simplesmente, dual) de G e denota-se por G^*, o grafo obtido de G por aplicação do seguinte procedimento:

1. A cada face de G faz-se corresponder um vértice de G^*.
2. A cada aresta $e \in E(G)$ faz-se corresponder uma aresta $e^* \in E(G^*)$ que liga duas faces (vértices de $V(G^*)$) vizinhas, cruzando a aresta e.

Para digrafos, $\overrightarrow{G}$, o sentido de cada um dos arcos, $a^* \in A(\overrightarrow{G}^*)$, é determinado dividindo o ciclo orientado $\overrightarrow{C}$ que limita a face correspondente a v^* em $\overrightarrow{C}^+$ e $\overrightarrow{C}^-$. Se $a \in \overrightarrow{C}^+$, então o arco que o intersecta tem cauda em v^*, caso contrário tem cabeça em v^*.

Propriedades do dual geométrico

- Dado um grafo plano G e o seu dual geométrico G^*, verificam-se as seguintes propriedades:
  1. G^* é conexo.

Propriedades do dual geométrico

- Dado um grafo plano G e o seu dual geométrico G^*, verificam-se as seguintes propriedades:
  1. G^* é conexo.
  2. Se G é conexo, então $(G^*)^* = G$.

Propriedades do dual geométrico

- Dado um grafo plano G e o seu dual geométrico G^*, verificam-se as seguintes propriedades:
  1. G^* é conexo.
  2. Se G é conexo, então $(G^*)^* = G$.
  3. Se G é conexo, então G^* contém um vértice de corte se e só se G contém um vértice de corte.

Propriedades do dual geométrico

- Dado um grafo plano G e o seu dual geométrico G^*, verificam-se as seguintes propriedades:
  1. G^* é conexo.
  2. Se G é conexo, então $(G^*)^* = G$.
  3. Se G é conexo, então G^* contém um vértice de corte se e só se G contém um vértice de corte.
  4. Se C é um ciclo de G e $E_C = E(C)$ é o correspondente conjunto de arestas, então E_C^* é um corte de G^*, ou seja, existe $X^* \subset V(G^*)$ tal que $E_C^* = \partial(X^*)$.

Propriedades do dual geométrico

- Dado um grafo plano G e o seu dual geométrico G^*, verificam-se as seguintes propriedades:
  1. G^* é conexo.
  2. Se G é conexo, então $(G^*)^* = G$.
  3. Se G é conexo, então G^* contém um vértice de corte se e só se G contém um vértice de corte.
  4. Se C é um ciclo de G e $E_C = E(C)$ é o correspondente conjunto de arestas, então E_C^* é um corte de G^*, ou seja, existe $X^* \subset V(G^*)$ tal que $E_C^* = \partial(X^*)$.
  5. Se $F \subseteq G$ é uma floresta e $E_F = E(F)$ é o correspondente conjunto de arestas, então $G^* - E_F^*$ é um grafo conexo.

Dual combinatório

Definição

Dado um grafo G, designa-se por *dual combinatório* de G o grafo que se denota por G^{cb}, se existe uma função $\varphi : E(G) \to E(G^{cb})$ tal que C é um ciclo de G se e só se $\varphi(E(C))$ é um corte (co-circuito) de G^{cb}.

Dual combinatório

Definição

Dado um grafo G, designa-se por *dual combinatório* de G o grafo que se denota por G^{cb}, se existe uma função $\varphi : E(G) \to E(G^{cb})$ tal que C é um ciclo de G se e só se $\varphi(E(C))$ é um corte (co-circuito) de G^{cb}.

Com base nesta definição, é fácil provar que, sendo G^{cb} o dual combinatório de G e $e \in E(G)$, se e^{cb} é a aresta que em G^{cb} corresponde a e, então $G^{cb} - e^{cb}$ é o dual combinatório de G/e e G^{cb}/e^{cb} é o dual combinatório de $G - e$, onde H/e denota a operação de contracção da aresta e no grafo H e $H - e$ a eliminação da aresta e em H.

Relações entre o dual geométrico e dual combinatório

Teorema

Seja G um grafo plano, 2-conexo e H o dual geométrico de G, ou seja, $H = G^*$. Então H é o dual combinatório de G, ou seja, $H = G^{cb}$.

Relações entre o dual geométrico e dual combinatório

Teorema

Seja G um grafo plano, 2-conexo e H o dual geométrico de G, ou seja, $H = G^*$. Então H é o dual combinatório de G, ou seja, $H = G^{cb}$.

Se um grafo H admite um dual combinatório H^{cb}, então todo o menor de H admite um dual combinatório, podendo demonstrar-se que K_5 e $K_{3,3}$ não admitem duais combinatórios.

Relações entre o dual geométrico e dual combinatório

Teorema

Seja G um grafo plano, 2-conexo e H o dual geométrico de G, ou seja, $H = G^*$. Então H é o dual combinatório de G, ou seja, $H = G^{cb}$.

Se um grafo H admite um dual combinatório H^{cb}, então todo o menor de H admite um dual combinatório, podendo demonstrar-se que K_5 e $K_{3,3}$ não admitem duais combinatórios.

Teorema [Whitney, 1932 e 1933]

Seja G um grafo 2-conexo. Então G é planar se e só se admite um dual combinatório. Adicionalmente, sendo G^{cb} o dual combinatório de G, então G tem uma realização plana com dual geométrico G^* isomorfo a G^{cb}.

Definição de k-fluxo

Definição

Dado um grafo G, designa-se por k-fluxo de G, um par de funções $(\overrightarrow{O}, \phi)$, onde $\overrightarrow{O}$ determina uma orientação para cada uma das arestas $e \in E(G)$ e

$$\begin{array}{rcl} \phi : E(G) & \mapsto & \{1, \ldots, k-1\} \\ e & \rightsquigarrow & \phi(e) \end{array}$$

define os pesos (fluxos) inteiros para cada uma das arestas de $E(G)$ de tal forma que os vértices tenham a propriedade de conservação do fluxo, ou seja, em cada vértice, a soma dos fluxos que entram no vértice é igual à soma dos fluxos que saem do vértice.

k-fluxos de grafos planos

No caso dos grafos planos, com as suas faces coloridas propriamente com as k cores $0, 1, \ldots, k-1$, podemos construir um k-fluxo orientando as arestas de modo que a maior cor seja a da face direita (quando nos viramos para cabeça do arco) e atribuindo ao arco o peso (ou fluxo) correspondente à cor maior menos a cor menor.

k-fluxos de grafos planos

No caso dos grafos planos, com as suas faces coloridas propriamente com as k cores $0, 1, \ldots, k-1$, podemos construir um k-fluxo orientando as arestas de modo que a maior cor seja a da face direita (quando nos viramos para cabeça do arco) e atribuindo ao arco o peso (ou fluxo) correspondente à cor maior menos a cor menor.

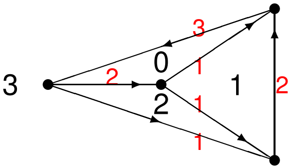

Figure: Exemplo de um 4-fluxo para K_4 (note-se que a face ilimitada tem cor 3).

Problemas em aberto

Fixando k, é possível definir classes de grafos que admitam um k-fluxo?

- Para $k = 1$, temos os grafos sem arestas.
- Para $k = 2$, temos os grafos Eulerianos.

Problemas em aberto

Fixando k, é possível definir classes de grafos que admitam um k-fluxo?

- Para $k = 1$, temos os grafos sem arestas.
- Para $k = 2$, temos os grafos Eulerianos.

Em 1954 e 1966 Tutte introduziu o conceito de k-fluxo e propôs as seguintes conjecturas:

1. Conjectura dos 5-fluxos: todo o grafo sem arestas de corte admite um 5-fluxo.
2. Conjectura dos 4-fluxos: todo o grafo sem arestas de corte que não tem o grafo de Petersen como menor admite um 4-fluxo.
3. Conjectura dos 3-fluxos: todo o grafo sem arestas de corte e sem cortes de cardinalidade 3 admite um 3-fluxo.

Equivalência entre k-fluxos e k-colorações de grafos planares

- Um k-fluxo $(\overrightarrow{O}, \phi)$ diz-se modular quando em cada vértice a diferença entre o fluxo que chega e o fluxo que parte é zero módulo k.

Equivalência entre k-fluxos e k-colorações de grafos planares

- Um k-fluxo $(\overrightarrow{O}, \phi)$ diz-se modular quando em cada vértice a diferença entre o fluxo que chega e o fluxo que parte é zero módulo k.
- Prova-se que um k fluxo modular pode ser sempre convertido em um k-fluxo, ou seja, um grafo admite um k-fluxo se e só se admite um k-fluxo modular.

Equivalência entre *k*-fluxos e *k*-colorações de grafos planares

- Um k-fluxo $(\overrightarrow{O}, \phi)$ diz-se modular quando em cada vértice a diferença entre o fluxo que chega e o fluxo que parte é zero módulo k.
- Prova-se que um k fluxo modular pode ser sempre convertido em um k-fluxo, ou seja, um grafo admite um k-fluxo se e só se admite um k-fluxo modular.

Teorema

[Younger, 1983] Um mapa planar admite uma k-coloração das suas faces se e só se admite um k-fluxo modular.

Equivalência entre *k*-fluxos e *k*-colorações de grafos planares

- Um *k*-fluxo $(\overrightarrow{O}, \phi)$ diz-se modular quando em cada vértice a diferença entre o fluxo que chega e o fluxo que parte é zero módulo *k*.
- Prova-se que um *k* fluxo modular pode ser sempre convertido em um *k*-fluxo, ou seja, um grafo admite um *k*-fluxo se e só se admite um *k*-fluxo modular.

Teorema

[Younger, 1983] Um mapa planar admite uma *k*-coloração das suas faces se e só se admite um *k*-fluxo modular.

Este teorema, juntamente com a equivalência entre *k*-fluxos e *k*-fluxos modulares, permite estabelecer a equivalência entre *k*-colorações de mapas planares e *k*-fluxos.

Mapas planos e mapas em superfícies orientáveis arbitrários

O caso particular dos grafos planares

Embora as conjecturas de Tutte permaneçam em aberto até hoje. Com recurso ao teorema de Younger, as conjecturas dos 5-, 4- e 3-fluxos restritas a grafos planares, estão resolvidas pelo teorema das cinco cores, teorema das quatro cores e teorema das três cores de Grötzch, respectivamente.

Mapas planos e mapas em superfícies orientáveis arbitrários

O caso particular dos grafos planares

Embora as conjecturas de Tutte permaneçam em aberto até hoje. Com recurso ao teorema de Younger, as conjecturas dos 5-, 4- e 3-fluxos restritas a grafos planares, estão resolvidas pelo teorema das cinco cores, teorema das quatro cores e teorema das três cores de Grötzch, respectivamente.

O caso dos mapas em superfícies orientáveis arbitrárias

É possível estender parcialmente o teorema de Younger a mapas em superfícies orientáveis arbitrárias, provando-se que a existência de uma k-coloração das faces implica a existência de um k-fluxo modular, o recíproco, porém, nem sempre é verdadeiro.

Grafos arbitrários versus grafos planares

Note-se que para grafos em geral o conceito de coloração de faces é relativo à superfície de imersão do grafo G em questão. Diferente é o problema de fluxos inteiros e o problema de coloração de vértices que não depende de conceitos topológicos.

Grafos arbitrários versus grafos planares

Note-se que para grafos em geral o conceito de coloração de faces é relativo à superfície de imersão do grafo G em questão. Diferente é o problema de fluxos inteiros e o problema de coloração de vértices que não depende de conceitos topológicos.
A equivalência entre estes três problemas só acontece no plano (ou esfera).

Grafos arbitrários versus grafos planares

Note-se que para grafos em geral o conceito de coloração de faces é relativo à superfície de imersão do grafo G em questão. Diferente é o problema de fluxos inteiros e o problema de coloração de vértices que não depende de conceitos topológicos.
A equivalência entre estes três problemas só acontece no plano (ou esfera).

Outra diferença existente entre k-fluxos inteiros e k-colorações é que enquanto o valor de k pode ser arbitrariamente grande no caso das colorações, no caso dos fluxos existe um limite superior, actualmente igual a 6 (obtido por Seymour) e conjecturado em 5 (por Tutte), para qualquer grafo finito sem arestas de corte.

Contagem das colorações de vértices

Birkhoff em 1912 e Whitney em 1932 mostraram que o número de colorações próprias distintas dos vértices de um grafo, em função do número de cores, é uma função polinomial. Por sua vez, Bikhoff e Lewis, num estudo realizado em 1946, baptizaram esta função de polinómio cromático.

Contagem das colorações de vértices

Birkhoff em 1912 e Whitney em 1932 mostraram que o número de colorações próprias distintas dos vértices de um grafo, em função do número de cores, é uma função polinomial. Por sua vez, Bikhoff e Lewis, num estudo realizado em 1946, baptizaram esta função de polinómio cromático.

Definição

Dado um grafo G, designa-se por polinómio cromático de G e denota-se por $f(G;\lambda)$ o polinómio que para cada λ determina o número de colorações (próprias) de vértices que é possível realizar em G utilizando λ cores.

Casos particulares

Logo, se $\chi(G) > \lambda \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então $f(G;\lambda) = 0$ e

$$\chi(G) = \min_{f(G;\lambda)>0} \lambda \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Casos particulares

Logo, se $\chi(G) > \lambda \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então $f(G;\lambda) = 0$ e

$$\chi(G) = \min_{f(G;\lambda)>0} \lambda \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

É fácil concluir que $f(K_\nu;\lambda) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-(\nu-1))$. Por exemplo, $f(K_3;\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$ e $f(K_\nu^c;\lambda) = \lambda^\nu$.

Casos particulares

Logo, se $\chi(G) > \lambda \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então $f(G;\lambda) = 0$ e

$$\chi(G) = \min_{f(G;\lambda)>0} \lambda \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

É fácil concluir que $f(K_\nu;\lambda) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-(\nu-1))$. Por exemplo, $f(K_3;\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$ e $f(K_\nu^c;\lambda) = \lambda^\nu$.

Teorema

Se G é um grafo simples, então $\forall e \in E(G)$

$$f(G;\lambda) = f(G-e;\lambda) - f(G/e;\lambda).$$

Algumas propriedades

Teorema

Dado um grafo simples G com ν vértices e ε arestas, $f(G;\lambda)$ é um polinómio mónico de grau ν em λ com coeficientes inteiros e termo constante nulo. Adicionalmente, cada coeficiente alterna em sinal e o coeficiente de $\lambda^{\nu-1}$ é $-\varepsilon$.

Algumas propriedades

Teorema

Dado um grafo simples G com ν vértices e ε arestas, $f(G;\lambda)$ é um polinómio mónico de grau ν em λ com coeficientes inteiros e termo constante nulo. Adicionalmente, cada coeficiente alterna em sinal e o coeficiente de $\lambda^{\nu-1}$ é $-\varepsilon$.

De acordo com o teorema anterior, podemos concluir que dado um grafo simples G, todas as raízes de $f(G,\lambda)$ são não negativas (uma vez que os coeficientes alternam em sinal, para $\lambda < 0$ todos os termos de $f(G,\lambda)$ têm o mesmo sinal).

Algumas propriedades

Teorema

Dado um grafo simples G com ν vértices e ε arestas, $f(G;\lambda)$ é um polinómio mónico de grau ν em λ com coeficientes inteiros e termo constante nulo. Adicionalmente, cada coeficiente alterna em sinal e o coeficiente de $\lambda^{\nu-1}$ é $-\varepsilon$.

De acordo com o teorema anterior, podemos concluir que dado um grafo simples G, todas as raízes de $f(G,\lambda)$ são não negativas (uma vez que os coeficientes alternam em sinal, para $\lambda < 0$ todos os termos de $f(G,\lambda)$ têm o mesmo sinal). Conclui-se ainda que 0 é raiz do polinómio cromático de qualquer grafo simples G e tem multiplicidade igual ao número de componentes conexas de G. Por outro lado, é claro que se G tem pelo menos uma aresta, então 1 é uma raiz do polinómio cromático $f(G,\lambda)$.

Definição e propriedades

Dado uma grafo G, designa-se por polinómio dos fluxos de G a função $F(G, k)$ tal que para todo o inteiro positivo k, $F(G, k)$ é igual ao número de k-fluxos (nowhere-zero k-flows) de G.

Definição e propriedades

Dado uma grafo G, designa-se por polinómio dos fluxos de G a função $F(G, k)$ tal que para todo o inteiro positivo k, $F(G, k)$ é igual ao número de k-fluxos (nowhere-zero k-flows) de G.

Se G tem ν vértices, ε arestas e c componentes, então $F(G, k)$ tem grau $\varepsilon - \nu + c$.

Definição e propriedades

Dado uma grafo G, designa-se por polinómio dos fluxos de G a função $F(G, k)$ tal que para todo o inteiro positivo k, $F(G, k)$ é igual ao número de k-fluxos (nowhere-zero k-flows) de G.

Se G tem ν vértices, ε arestas e c componentes, então $F(G, k)$ tem grau $\varepsilon - \nu + c$.

Exemplo

Se G é um grafo constituído por ε arestas em paralelo (e dois vértices, portanto), então

$$F(G, k) = (k-1)^{\varepsilon-1}.$$

Propriedades

Se G é um grafo conexo planar, então existe uma aplicação sobrejectiva entre o conjunto das k-colorações de vértices de G^* e os k-fluxos modulares de G tal que cada k-fluxo modular de G tem exacatmente k imagens recíprocas.

Propriedades

Se G é um grafo conexo planar, então existe uma aplicação sobrejectiva entre o conjunto das k-colorações de vértices de G^* e os k-fluxos modulares de G tal que cada k-fluxo modular de G tem exactamente k imagens recíprocas.

Consequência

$$f(G^*, k) = kF(G, k).$$

Conjectura de Birkhoff e Lewis

Questões sobre as raízes do polinómio cromático

Dado um grafo G e um inteiro k,

- G admite uma k-coloração própria dos seus vértices?
- Verifica-se a desigualdade $f(G, k) > 0$?
- Será que k pertence a alguma região livre de raízes para $f(G, \lambda)$?

Conjectura de Birkhoff e Lewis

Questões sobre as raízes do polinómio cromático

Dado um grafo G e um inteiro k,

- G admite uma k-coloração própria dos seus vértices?
- Verifica-se a desigualdade $f(G, k) > 0$?
- Será que k pertence a alguma região livre de raízes para $f(G, \lambda)$?

Conjectura [Birkhoff-Lewis, 1948]

O polinómio cromático de um grafo planar não tem zeros no intervalo $[4, \infty[$.

Conjectura de Birkhoff e Lewis

Questões sobre as raízes do polinómio cromático

Dado um grafo G e um inteiro k,

- G admite uma k-coloração própria dos seus vértices?
- Verifica-se a desigualdade $f(G, k) > 0$?
- Será que k pertence a alguma região livre de raízes para $f(G, \lambda)$?

Conjectura [Birkhoff-Lewis, 1948]

O polinómio cromático de um grafo planar não tem zeros no intervalo $[4, \infty[$.

Esta conjectura continua em aberto e tudo o que sabemos é:

- $f(G, \lambda) \neq 0$, para $\lambda \in [5, \infty[$;
- $f(G, 4) \neq 0$.

Densidade das raízes do polinómio cromático no plano complexo

Durante muito tempo pensava-se que a localização das raízes dos polinómios cromáticos no plano complexo estava restringidas a certas regiões. Contudo, Sokal em 2000 obteve o seguinte resultado:

Densidade das raízes do polinómio cromático no plano complexo

Durante muito tempo pensava-se que a localização das raízes dos polinómios cromáticos no plano complexo estava restringidas a certas regiões. Contudo, Sokal em 2000 obteve o seguinte resultado:

Teorema [Sokal, 2000]

O conjunto das raízes dos polinómios cromáticos de grafos planares é denso no plano complexo, com eventual excepção do disco $\{z : |z - 1| < 1\}$.

Densidade das raízes do polinómio cromático no plano complexo

Durante muito tempo pensava-se que a localização das raízes dos polinómios cromáticos no plano complexo estava restringidas a certas regiões. Contudo, Sokal em 2000 obteve o seguinte resultado:

Teorema [Sokal, 2000]

O conjunto das raízes dos polinómios cromáticos de grafos planares é denso no plano complexo, com eventual excepção do disco $\{z : |z-1| < 1\}$.

Permanece em aberto saber se o conjunto das raízes complexas dos polinómios cromáticos de grafos planares é denso em todo o plano complexo.

Consequências

- O teorema das quatro cores não pode ser obtido analisando a eventual não existência de raízes numa certa bola centrada em 4, independentemente do raio da bola.
- O conjunto das raízes do polinómio de fluxos é denso em todo o plano complexo (eventualmente, com excepção da bola centrada em 1 e raio 1).

Conjectura de Welsh

Segue-se uma extensão da conjectura de Birkhoff-Lewis a raízes de polinómios de fluxos.

Conjectura de Welsh

Segue-se uma extensão da conjectura de Birkhoff-Lewis a raízes de polinómios de fluxos.

Conjectura [Welsh]

Não existem raízes do polinómio dos fluxos no intervalo $]4, \infty[$.

Conjectura de Welsh

Segue-se uma extensão da conjectura de Birkhoff-Lewis a raízes de polinómios de fluxos.

Conjectura [Welsh]

Não existem raízes do polinómio dos fluxos no intervalo $]4, \infty[$.

Existem grafos que não admitem 4-fluxos, como é o caso do grafo de Petersen, mas não conhecemos grafos com raízes do seu polinómio de fluxos superiores a 4. Além disso, não se conhece qualquer constante que limite superiormente as raízes dos polinómios de fluxos.